Γραμμική Άλγεβρα 1 13/10/15

1) Πρόσθεση πινάκων
2) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός στοιχείων του F με πίνακα
3) Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ορισμός: Αν $A, B \in F^{\nu \cdot \mu}$, ορίζουμε $A-B = A+(-B) \in F^{\nu \cdot \mu}$

π.χ. Έστω $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2A-B+C=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 14 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 14 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

π.χ. Έστω $A, B \in F^{\nu \cdot \mu}$. Θέτουμε $C=3(5A-2B)+6(A+B)-3B$ τότε
$C=15A-6B+6A+6B-3B=21A-3B$

Προσοχή: Για να ορίζεται ο πολλαπλασιασμός AB δύο πινάκων πρέπει:
α) Ο αριθμός στηλών του A να είναι ίσος με τον αριθμό ~~στηλών~~ γραμμών του B.
β) Τα στοιχεία τους να είναι στο ίδιο σώμα F.

Ορισμός: Έστω ν, σ, μ τρεις θετικοί ακέραιοι, F σώμα και $A \in F^{\nu \cdot \sigma}$, $B \in F^{\sigma \cdot \mu}$. Έστω ότι $A=(a_{ij})$ και $B=(b_{jk})$. Τότε το γινόμενο $C=AB \in F^{\nu \cdot \mu}$ έχει (i,j) στοιχείο ίσο με το άθροισμα ίσο με
$\sum_{j=1}^{\sigma} a_{ij} \cdot b_{jk} = \alpha_{i1} b_{1k} + \alpha_{i2} b_{2k} + \ldots + \alpha_{i\sigma} b_{\sigma k}$

Παράδειγμα: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in R^{2 \times 3}$, $B=(5\ 6) \in R^{1 \times 2}$. Ορίζεται το $A \cdot B$;
Όχι γιατί ο αριθμός στηλών του $A \neq$ αριθμός γραμμών του B.
Ορίζεται το γινόμενο $B \cdot A$;
Ναι ορίζεται και $B \cdot A \in R^{1 \times 3}$ $BA=(5\ 6)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (5 \cdot 2+6 \cdot 1 \quad 5 \cdot 3+6 \cdot 5 \quad 5 \cdot 4+6 \cdot 7)$
$=(16 \quad 45 \quad 62)$

Παράδειγμα: Αν $A=\begin{pmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{pmatrix}\in F^{2\times 2}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in F^{2\times 2}$
Το AB ορίζεται και $AB=\begin{pmatrix}\alpha x+bz & \alpha y+bw\\ cx+dz & cy+dw\end{pmatrix}$

Επίσης ο BA ορίζεται και $BA=\begin{pmatrix}x\alpha+yc & xb+yd\\ z\alpha+wc & zb+wd\end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι γενικά, $AB\neq BA$. Για παράδειγμα
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\Phi_{2\times 2}$ ενώ $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Συμπέρασμα: Αν A,B τετραγωνικοί πίνακες <u>ίδιων</u> διαστάσεων με ίδιο σώμα τα γινόμενα AB και BA ορίζονται. Γενικά όμως $AB\neq BA$. Με άλλα λόγια ανάλογα με το ποιοι είναι οι A και B <u>μπορεί</u> και ισχύει $AB=BA$ ή μπορεί να ισχύει $AB\neq BA$

Παράδειγμα: Έστω $A=(1\ 2\ 3)\in F^{1\times 3}$ πίνακας γραμμή και
$B=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\in F^{3\times 1}$ πίνακας στήλη. Τότε:
$AB=(1\cdot 5+2\cdot 3+3\cdot 1)\in F^{1\times 1}$

Παρατήρηση: Έστω $A\in F^{\nu\cdot\upsilon}$ και $B\in F^{\upsilon\cdot\mu}$ τότε ο $AB\in F^{\nu\mu}$ ορίζεται και

$$AB=\begin{pmatrix}(\text{1η γραμ. }A)(\text{1 στήλη }B) & (\text{1η γραμ. }A)(\text{2 στήλη }B) & \dots & (\text{1η γραμμή }A)(\mu\text{ στήλη }B)\\ (\text{2η γραμ. }A)(\text{1 στήλη }B) & (\text{2η γραμ. }A)(\text{2 στήλη }B) & \dots & (\text{2η γραμμή }A)(\mu\text{ στήλη }B)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\nu\text{ γραμμή }A)(\text{1η στήλη }B) & (\nu\text{ γραμμή }A)(\text{2η στήλη }B) & \dots & (\nu\text{ γραμμή }A)(\mu\text{ στήλη }B)\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: $\begin{pmatrix}\alpha & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+bz & \alpha y+bw\\ cx+dz & cy+dw\end{pmatrix}$

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε το γραμμικό σύστημα. Μπορούμε να το γράψουμε σαν ισότητα πινάκων δηλ. για $\begin{cases}2x+y=3\\ 5x-6y=4\end{cases}$ τότε

$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & -6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$ δηλαδή $A\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=b$ όπου $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 6\end{bmatrix}\in F^{2\times 2}$, $b=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}\in F^{2\times 1}$
Αναλογία με γραμ. εξ. σε μια μεταβλητή $\alpha x=c$ με $\alpha,c\in F$

Ορισμός: Έστω $\nu \geq 1$ και F σώμα. Ο ταυτοτικός πίνακας $I_\nu \in F^{\nu \cdot \nu}$ είναι ο τετραγωνικός $\nu \times \nu$ πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ίσα με 1_F και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία ίσα με 0_F.

π.χ. $I_2 = \begin{bmatrix} 1_F & 0_F \\ 0_F & 1_F \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1_F & & 0 \\ & 1_F & \\ 0 & & 1_F \end{bmatrix}$, $I_4 = \begin{bmatrix} 1_F & & & 0 \\ & 1_F & & \\ & & 1_F & \\ 0 & & & 1_F \end{bmatrix}$

Πρόταση: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \mu}$. Τότε $I_\nu \cdot A = A$ και $A \cdot I_\mu = A$

Απόδειξη

Για $\nu = \mu = 2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_F \cdot \alpha + 0_F \cdot c & 1_F \cdot b + 0_F \cdot d \\ 0_F \cdot \alpha + 1_F \cdot c & 0_F \cdot b + 1_F \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Πόρισμα: Αν $A \in F^{\nu \cdot \nu}$ τότε $I_\nu \cdot A = A \cdot I_\nu = A$, δηλαδή αν περιοριστούμε στους τετραγωνικούς πίνακες $\nu \times \nu$, ο I_ν είναι ουδέτερο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Πρόταση: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \sigma}$, $B \in F^{\sigma \cdot \rho}$, $C \in F^{\rho \cdot \mu}$. Τότε $A(B \cdot C) = (AB) \cdot C$

Απόδειξη

Έστω $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$

AB: Θέτουμε $t_{ik} = \sum_{j=1}^{\sigma} \alpha_{ij} b_{jk}$. Τότε $t_{ik} = (i,k)$ στοιχείο του AB.

Άρα ο $(AB)C$ έχει (i,l) στοιχείο ίσο με $\sum_{k=1}^{\rho} t_{ik} c_{kl}$.

BC: Θέτουμε $s_{jl} = \sum_{k=1}^{\rho} b_{jk} c_{kl}$. Τότε $s_{jl} = (j,l)$ στοιχείο του BC.

Άρα ο $A(BC)$ έχει (i,l) στοιχείο ίσο με $\sum_{j=1}^{\sigma} a_{ij} s_{jl}$

Ισχυρισμός $\sum_{k=1}^{\rho} t_{ik} c_{kl} = \sum_{j=1}^{\sigma} \alpha_{ij} s_{jl}$

Απόδειξη

$\sum_k t_{ik} c_{k\ell} = \sum_k (\sum_j \alpha_{ij} b_{jk}) c_{k\ell} = \sum_k \sum_j \alpha_{ij} b_{jk} \cdot c_{k\ell}$

ομοίως δείχνουμε $\sum_{j=1}^{\sigma} \alpha_{ij} s_{j\ell} = \sum_k \sum_j \alpha_{ij} b_{jk} c_{k\ell}$

Πρόταση: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \mu}$, $B \in F^{\mu \cdot \sigma}$, $B' \in F^{\mu \cdot \sigma}$, $C \in F^{\sigma \cdot \tau}$, $\kappa \in F$. Τότε

i) (επιμεριστική ιδιότητα) $A(B+B') = AB + AB'$

$(B+B')C = BC + B'C$

ii) $(\kappa \cdot A) \cdot B = \kappa(AB) = A(\kappa \cdot B)$

Απόδειξη (όπως την προηγούμενη πρόταση)

Πρόταση: Αν $A \in F^{\nu \cdot \sigma}$, $B \in F^{\sigma \cdot \mu}$, τότε

i) Για κάθε ρ. $\mathbb{O}_{\rho \cdot \nu} \cdot A = \mathbb{O}_{\rho \cdot \sigma}$

$A\, \mathbb{O}_{\sigma \cdot \rho} = \mathbb{O}_{\nu \cdot \rho}$

ii) $(-A) \cdot B = -(AB) = A(-B)$

iii) $(-A)(-B) = AB$

Απόδειξη: Άμεσα από τα προηγούμενα.

Ας υποθέσουμε ότι $A, B \in F^{\nu \cdot \nu}$ οπότε ορίζεται και η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πινάκων.

Η πρόσθεση είναι μεταθετική, προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο το $\mathbb{O}_{\nu \cdot \nu}$ κάθε $A \in F^{\nu \cdot \nu}$ έχει μοναδικό αντίθετο

Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός και επιμεριστικός και από δεξιά και από αριστερά ως προς την πρόσθεση έχει ουδέτερο στοιχείο (και από δεξιά και από αριστερά τον $I_\nu \in F^{\nu \cdot \nu}$) είδαμε ότι ο πολλαπλασιασμός, γενικά, δεν είναι μεταθετικός, (για $\nu \geq 2$). Επίσης είδαμε ότι είναι δυνατόν (για $\nu \geq 2$) το γινόμενο δύο μη μηδενικών πινάκων να είναι ο μηδενικός πίνακας.

Παρατήρηση: Ορίζουμε για A τετράγωνο $A^2=A\cdot A$, $A^3=A\cdot A^2$, $A^4=A\cdot A^3$ κλπ (με επαγωγή). Έστω $A, B \in F^{\nu\times\nu}$. Με τι είναι ίσο το $(A+B)^2$;

Έχουμε $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

Προσοχή! Επομένως αν A,B δεν μετατίθενται (δηλ. $AB\neq BA$) δεν ισχύει $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. Αν $AB=BA$ τότε ισχύει.

Ορισμός: Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας.

i) Ο A λέγεται άνω τριγωνικός αν όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι ίσα με 0_F (π.χ. $\begin{bmatrix}\alpha & b\\ 0_F & c\end{bmatrix}$ κ' $\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0_F & d & e\\ 0_F & 0_F & g\end{bmatrix}$ είναι τριγωνικοί, ενώ ο πίνακας $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 8 & -2\end{bmatrix}$ δεν είναι.

ii) Ο A λέγεται κάτω τριγωνικός αν όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι ίσα με 0_F π.χ. $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

Παρατήρηση: Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι διαγώνιος αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνικός.

Πρόταση: Έστω $A,B \in F^{\nu\times\nu}$ άνω τριγωνικοί, $\kappa\in F$. Τότε οι πίνακες $A+B$, κA και AB είναι άνω τριγωνικοί.

Απόδειξη

Για το $A+B$. Αφού κάθε στοιχείο του A και B κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν και η πρόσθεση ορίζεται κατά συντεταγμένες το αποτέλεσμα έπεται για τον $A+B$.

Για τον κA, ίδιο επιχείρημα, αφού $\kappa 0_F=0_F$ για κάθε $\kappa\in F$.

Για το AB (απόδ. μόνο για $n=2$). Έστω $A=\begin{bmatrix}\alpha & b\\ 0 & d\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & z\end{bmatrix}$ άρα

$$AB=\begin{bmatrix}\alpha x & \alpha y+bz\\ 0 & dz\end{bmatrix}$$

Ομοίως ισχύει ότι αν $A, B \in F^{\nu \times \nu}$ κάτω τριγωνικοί και $\kappa \in F$, τότε και οι πίνακες $A+B$, κA, AB είναι κάτω τριγωνικοί.

Ομοίως, και πιο εύκολα, αν $A, B \in F^{\nu \times \nu}$ είναι διαγώνιοι, τότε και οι πίνακες $A+B$, κA, AB είναι διαγώνιοι.